Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XI-a SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru $n \geq 1$.

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Gazeta Matematică

Soluţie. Prin inducţie demonstrăm că $x_n > 0$ şi $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n > 1$ (De exemplu, folosim ipoteza de inducţie $P(n) : x_1, \ldots, x_n > 0, x_1 x_2 \cdots x_n > 1$).
.... 2 puncte

Din inegalitatea mediilor avem

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

de unde $x_1 x_2 \cdots x_n \geq n^{\frac{n}{n-1}}$, aceasta atrăgând $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \cdots x_n = \infty$
.... 3 puncte

De aici

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - 1} = 1$$

.... 2 puncte

Problema 2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $AB = O_3$.

a) Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xAB)$ este polinomială de gradul cel mult 2.

b) Demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Soluţie.

a) Cum $\det(AB) = 0$ obţinem $f(x) = \det(A^2 + B^2) + ax + bx^2$.
.... 2 puncte

b) Dar $f(i) = \det(A^2 + B^2 + iBA) = \det(A^2 + B^2 + i(BA - AB)) = \det(A + iB)\det(A - iB)$. Deducem $f(i) = f(-i)$ de unde $a = 0$.
.... 2 puncte

Din $f(i) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$ rezultă $\det(A^2 + B^2) - b \geq 0$
.... 1 punct

Pe de altă parte $f(1) = \det(A^2 + B^2 + AB + BA) = \det(A + B)^2 \geq 0$, de unde $\det(A^2 + B^2) + b \geq 0$. Prin adunarea ultimelor inegalităţi obţinem $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

. . . . 2 puncte

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB^2 = A - B$.

a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;

b) Arătaţi că $AB = BA$.

Soluţie. a) Din relaţia dată avem

$$AB^2 - AB + B + AB - A + I_n = I_n$$

ceea ce se scrie $(AB - A + I_n)(I_n + B) = I_n$ . . . . 3 puncte

b) Relaţia de inversabilitate se scrie şi $(I_n + B)(AB - A + I_n) = I_n$ sau $BAB + AB - BA = A - B$, ceea ce se scrie $AB^2 = BAB + AB - BA$ adică $(AB - BA)(B - I_n) = 0_n$ (1) . . . . 2 puncte

În mod analog se obţine relaţia $(AB + A + I_n)(I_n - B) = I_n$ care atrage din inversabilitate $(I_n - B)(AB + A + I_n) = I_n$ ce devine prin efectuarea înmulţirilor $(AB - BA)(B + I_n) = 0_n$ (2) . . . . 2 puncte

Prin scăderea relaţiilor (1) şi (2) obţinem $AB - BA = O_n$.

Problema 4. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{F}$ dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un interval (b, a) astfel încât pentru orice $x \in (b, a)$ să avem $f(x) \leq f(a)$.

a) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietatea $\mathcal{F}$ nemonotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă f este continuă şi are proprietatea $\mathcal{F}$, atunci f este crescătoare.

Soluţie. a) Funcţia definită pe $\mathbb{R}$ prin $f(x) = 0$ dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 1$ este în $\mathcal{F}$ şi nu este monotonă. . . . . 2 puncte

b) Să presupunem că f nu este crescătoare. Fie atunci $x_1 < x_2$ astfel încât $f(x_1) > f(x_2)$. Considerăm mulţimea

$$M = \{x \in (x_1, x_2) \mid f(x) \leq f(x_2)\}.$$

Din ipoteză M este nevidă şi evident mărginită. Prin urmare există $a = \inf M$. . . . . 2 puncte

Din continuitate avem $f(a) \leq f(x_2)$ . . . . 1 punct

Dacă $a \in (x_1, x_2)$ există $b < a$, $b \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(x) \leq f(a) \leq f(x_2)$ pentru orice $x \in (b, a)$, ceea ce contrazice alegera lui a. Rezultă $a = x_1$, deci $f(x_1) \leq f(x_2)$, contradicţie . . . . 2 puncte